Vorlesung 2: BV-Funktionen & Anwendungen

▷ Letztes Mal:

(i) Minimalflächenfunktional

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, dx, \qquad u|_{\partial\Omega} = u_0$$

(ii) ROF-Funktional

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(\nabla u)\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2\, dx$$

ZIEL heute: Methode, mit der wir die Existenz von Minimierern sicherstellen können.

$\rightsquigarrow$ Kompaktheit wesentlich, funktionalanalytische Motivation, BV-Fkt zu betrachten.

§3 – Die direkte Methode der Variationsrechnung

§3.1. Eine abstrakte Version

Setting:
- $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $D \subset X$ Teilmenge
- $\mathcal{F}: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ziel: Finde Bedingungen an X, D & $\mathcal{F}$ so, dass ein Minimierer existiert, d.h., ein $x_0 \in D$ mit auf D

$$\mathcal{F}[x_0] = \inf_{x\in D} \mathcal{F}[x] = \min_{x\in D} \mathcal{F}[x].$$

Wir nehmen an,

(i) dass $\mathcal{F}$ auf D nach unten beschränkt ist:

$$\exists \tilde{m}\in\mathbb{R}\ \forall x\in D:\ \tilde{m} \leq \mathcal{F}[x].$$

Dann existiert $m := \inf_{x\in D} \mathcal{F}$. Damit existiert eine Minimalfolge, also $(x_j)\subset D$ mit

$$\mathcal{F}[x_j] \longrightarrow m.$$

Wir wollen nun (gerne) zeigen, dass (x_j) in einem geeigneten Sinne eine konvergente Teilfolge hat, die gegen einen Minimierer konvergiert.

$\rightsquigarrow$ KOMPAKTHEITSPROBLEM!

(ii) Angenommen, $\mathcal{F}$ ist koerziv, d.h.

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \mathcal{F}[x] = +\infty$$

Ist $\mathcal{F}$ koerziv & (x_j) eine Minimalfolge, so muss (x_j) beschränkt sein (in $(X, \|\cdot\|)$, also

$$\exists R>0\ \forall j:\ \|x_j\| < R).$$

(iii) Angenommen, es gibt Konvergenz '$\rightsquigarrow$' auf X mit folgender Kompaktheitseigenschaft:

$$(y_j) \subset X \text{ beschr.} \Longrightarrow \exists\, y \in X\ \exists\, (y_{j(k)}) \subset (y_j): \quad y_{j(k)} \rightsquigarrow y$$

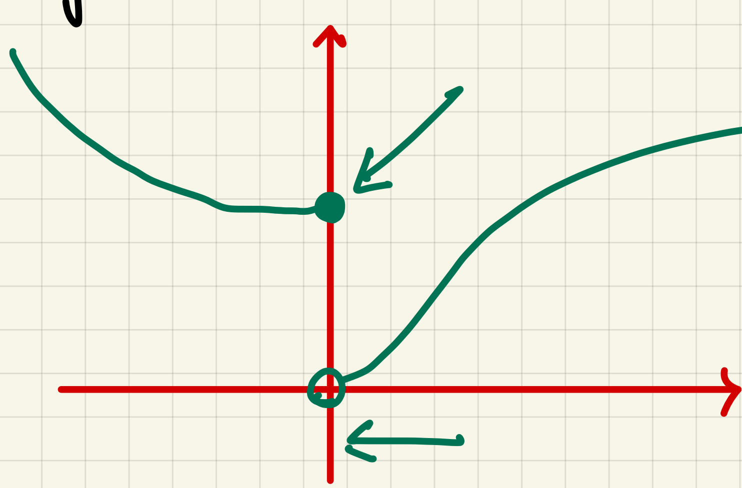
Dann gibt es nach (ii) ein $x \in X$ & $(x_{j(k)}) \subset (x_j)$ mit $x_{j(k)} \rightsquigarrow x$.

(v) Wir nehmen an, dass D bzgl. '$\rightsquigarrow$' abgeschlossen ist.

Damit nach (iv): $x \in D$.

(vi) $\mathcal{F}$ ist <u>folgenunterhalbstetig bzgl. '$\rightsquigarrow$'</u>: Falls $(y_j) \subset X$ mit $y_j \rightsquigarrow y$, so gilt

$$\mathcal{F}[y] \leq \liminf_{j \to \infty} \mathcal{F}[y_j].$$



Bsp. einer nicht UHS Fkt.

Mit (i)–(vi): Nach (v) ist $x \in D$, & nach (vi):

$$\inf_{y\in D} \mathcal{F}[y] \le \mathcal{F}[x] \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}[x_{j(k)}] \le \inf_{y\in D} \mathcal{F}[y]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[x] = \inf_{x\in D} \mathcal{F}[y] \quad (x \text{ ist Minimierer}).$$

BEM. 3.1.

- Kompaktheit & UHS sind kompetierende Eigenschaften: Je schwächer '$\rightharpoonup$', desto mehr konvergente Folgen, desto schwieriger UHS.
- '$\rightharpoonup$' ist so gut wie nie die Normkonvergenz

  ($\ell^2(\mathbb{N})$, $e_j := (0,\dots,0,\underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}},0,\dots)$)

§3.2. Eine Klasse von Modellfunktionale

Wir betrachten nun für

- ein offenes & beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand
- für ein $1 \le p < \infty$ eine konvexe & stetig diffbare Fkt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$c_1 |z|^p - c_2 \le F(z) \le c_3(1 + |z|^p).$$

(F konv. $\iff \forall x,y\in\mathbb{R}^n\ \forall\lambda\in[0,1]:\ F(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)$)

- einen Exponenten $q \geq p$ mit
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u\in W^{1,p}(\Omega).$$

Wir betrachten dann für $\lambda \geq 0$:

$f\in L^q(\Omega)$

$$\varphi[u] := \underbrace{\int_\Omega F(\nabla u)\,dx}_{} + \frac{\lambda}{2}\underbrace{\int_\Omega |u-f|^q\,dx}_{}$$

- auf $D_1 := \underline{u_0} + \underbrace{W_0^{1,p}(\Omega)}_{}$ für ein $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$
- auf $D_2 := W^{1,p}(\Omega)\cap\{u : \int_\Omega u\,dx = 0\}$

Für uns:

- Minimalflächen: $F(z)=\sqrt{1+|z|^2}$

  $|z| \le \sqrt{1+|z|^2} \le 1+|z|$ $(c_1=1, c_2=0, c_3=1)$.
  $p=1$.

- ROF: $F(z)=|z|$ (später)
- Dirichletintegral: $F(z)=\frac{1}{2}|z|^2$ ($p=2$, etc.)

§ 3.2.1. Hilfsaussagen aus der FA (check out Denk '17 § 3)

"Problem": Kompaktheit! Substitute: Schwache / schwach*-Konvergenz.

$(X, \|\cdot\|_X)$ norm. Raum, $(X', \|\cdot\|_{X'})$ Dualraum. Eine Folge

- $(x_j) \subset X$ <u>konvergiert schwach</u> gegen $x \in X$ ($x_j \rightharpoonup x$) gdw
$$\forall x' \in X': \quad x'(x_j) \to x'(x).$$
- $(x_j') \subset X'$ <u>konvergiert schwach*</u> gegen $x' \in X'$ ($x_j' \xrightharpoonup{*} x'$) gdw
$$\forall x \in X: \quad x_j'(x) \to x'(x).$$

$\boxed{\text{Thm. 3.2}}$ (Banach-Alaoglu) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein separabler, normierter VR. Ist $(x_j') \subset X'$ eine bzgl $\|\cdot\|_{X'}$ beschränkte Folge, so existiert ein $x' \in X'$ und eine TF $(x_{j(k)}') \subset (x_j')$:
$$x_{j(k)}' \xrightharpoonup{*} x'.$$

▶ BA gibt Konvergenz auf X, falls X selber Dualraum „ist".

▶ Das ist der Fall, wenn X <u>reflexiv</u> ist.

Wir betrachten den Bidual X'' $(= (X')')$. Betrachte
$$\iota : X \hookrightarrow X'',$$

das Auswertungsfunktional. ι arbeitet wie folgt:

$\iota(x)$ wertet aus, i.e.,

$$\forall x' \in X': \quad \iota(x)(x') = x'(x).$$

Mit HB: $\iota: X \hookrightarrow X''$ immer lineare Isometrie. Falls ι surjektiv, so nennen wir $(X, \|\cdot\|_X)$ <u>reflexiv</u>.

$\boxed{\text{COR. 3.3}}$ Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein sep. & reflexiver Banachraum & $(x_j) \subset X$ eine bzgl. $\|\cdot\|_X$ beschränkte Folge, so gibt es ein $x \in X$ & eine Teilfolge $(x_{j(k)}) \subset (x_j)$: $x_{j(k)} \rightharpoonup x$.

<u>Beweis:</u> $(x_j) \subset X$ beschränkt, dann ist auch $(\iota(x_j)) \subset X''$ beschränkt. Da $(X, \|\cdot\|_X)$ separabel & ι eine surj. Isometrie, $(X'', \|\cdot\|_{X''})$ separabel. Nach Hahn-Banach: $(X', \|\cdot\|_{X'})$ separabel. Damit ist BA anwendbar. Also

$$\exists y \in X'' \; \exists \, (\iota(x_{j(k)})) \subset (\iota(x_j)): \iota(x_{j(k)}) \xrightarrow{*} y$$

X reflexiv $\Rightarrow \exists!\, x \in X: \iota(x) = y$. Damit

$$\iota(x_{j(k)}) \xrightarrow{*} \iota(x).$$

Also $\quad \forall x' \in X': \quad \iota(x_{j(k)})(x') \longrightarrow \iota(x)(x').$

Damit: $\forall x' \in X'$: $x'(x_{j(k)} - x) \longrightarrow 0$,

also gerade $x_{j(k)} \longrightarrow x$ (in X). ⊠

▷ Gibt schwaches Kompaktheitsresultat ☺

BEM. 3.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ reflexiv gdw. $\underline{\underline{1 < p < \infty}}$.

(analog zu L^p. $(L^p)' \cong L^{p'}$, $p' = \frac{p}{p-1}$,

$1 \leq p < \infty$,

$(L^p)'' \cong (L^{p'})' \cong L^p$. $(1 < p < \infty)$

$\rightsquigarrow$ für L^p-Räume: Refl. gdw. $1 < p < \infty$).

§ 3.2.2. Unterhalbstetigkeit in Sobolevräumen.

Schwache Konvergenz gibt uns ein gutes Kompaktheits-setting falls $1 < p < \infty$.

Thm. 3.5 (UHS) Sei $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ einmal stetig differenzierbar & konvex. Sei weiters $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen & beschränkt & $z, z_1, z_2, \ldots : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>integrierbar</u>

mit $z_j \longrightarrow z$ in $\underbrace{L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)}$.

$\{u=(u_1,\dots,u_n): u_i \in L^1(\Omega)\}$

$\|u\| = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^1(\Omega)}$

Gilt $\int_\Omega F(z)\,dx < \infty$, so gilt auch

$$\int_\Omega F(z)\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega F(z_j)\,dx.$$