Funktionen beschränkter Variation und deren Anwendungen

Franz Gmeineder

Universität Konstanz

– Vorlesung 1 –

Allgemeines – zuerst: Herzlich willkommen!

- **Vorlesung:** Freitags, 10:00-11:30 Uhr
- Bei Fragen: Schreiben Sie mir bitte eine E-Mail an

  `franz.gmeineder@uni-konstanz.de`

  Dann können wir auch individuell Termine vereinbaren.
- **Material:**
  - **Handschriftliche Notizen:** Upload direkt nach der Vorlesung.
  - **Vorlesungsskript:** Upload über das Wochenende hinweg.
  - **Videoaufzeichnungen:** Upload via ILIAS (Link folgt)

$\rightsquigarrow$ Updates finden Sie auf meiner persönlichen Homepage

`https://fxgmeineder.wixsite.com/meinewebsite`

$\rightsquigarrow$ Es wird einen ILIAS-Kurs geben - dieser wird momentan eingerichtet.

- **Prüfung:** Mündliche Prüfung am Semesterende, individuelle Termine.

Struktur der heutigen Vorlesung

Wir werden klären, ...

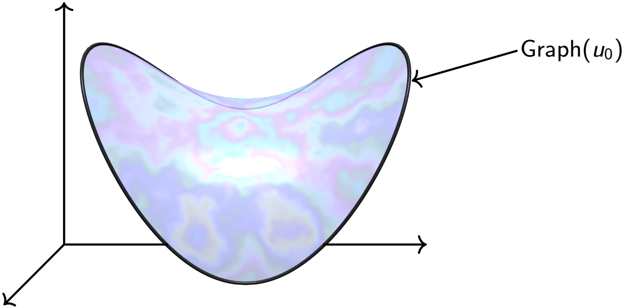
- **was** BV-Funktionen **sind**, ...
- ... **wozu wir diese benötigen**,
- ... daneben einige **Grundlagen aus der Funktionalanalysis** auffrischen,
- ... und dieses Bild erklären:

Minimalflächen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Das klassiche Minimalflächenproblem liest sich als:

$$\text{minimiere} \quad \mathscr{F}[u] := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{unter der Annahme} \quad u|_{\partial\Omega} = u_0.$$

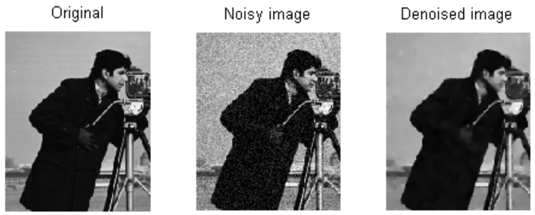
- Graphen von Minimierern ergeben Minimalflächen mit 'Randdatum' u_0.



- Wie können wir die Existenz von Minimierern sicherstellen?

Entrauschen von Bildern I

- Wir betrachten ein Bild (Original), das durch ein (hier Gaußsches) Rauschen verrauscht wurde.
- **Ziel:** Wir wollen das Bild **entrauschen**.



Graphik von Rudin, Osher, Fatemi '92

- Rauschen ist sehr irregulär $\rightarrow$ hohe '**Variation**' (Änderungsrate ist hoch)
- **Reduziere** die 'Variation', bleibe **nahe** am Bild, doch **bewahre** Kanten!

Entrauschen von Bildern II

Modellierung: Sei

- Ω das Rechteck, über dem das Bild sichtbar ist
- $f : \Omega \to [0, 1]$ das verrauschte Bild.
- Farbwerte entsprechen der Grauskala: $0 \simeq$ weiß, $1 \simeq$ schwarz

Metaprinzip der letzten Slide

Reduziere die 'Variation', bleibe **nahe** am Bild, doch **bewahre** Kanten!

Ansatz: Finde $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch Minimierung von

$$\mathfrak{F}[u] := \underbrace{\int_\Omega F(\nabla u)\,\mathrm{d}x}_{=:\mathrm{I}} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\int_\Omega |u - f|^2\,\mathrm{d}x}_{=:\mathrm{II}} .$$

Hier nehmen wir an, dass $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

- Was sind geeignete Kandidaten für F? u soll springen dürfen!
- Wann gibt es einen Minimierer – und vor allem: Auf welcher Menge?

Entrauschen von Bildern III

- Wählen wir in dem Funktional $F(z) = \frac{1}{2}|z|^2$, so erhalten wir
$$\mathfrak{F}[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u - f|^2 \, \mathrm{d}x.$$
- Das können wir auf $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ betrachten. Für $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$:
$$u \text{ Minimierer} \Rightarrow \mathfrak{F}[u] \leq \mathfrak{F}[u + \varepsilon\varphi],$$
also hat die Funktion $\varepsilon \mapsto \mathfrak{F}[u + \varepsilon\varphi]$ ein Minimum in $\varepsilon = 0$. Damit
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathfrak{F}[u + \varepsilon\varphi] = 0$$
Wir schreiben
$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[u + \varepsilon\varphi] &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u + \varepsilon\varphi)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u + \varepsilon\varphi - f|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + 2\varepsilon\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle + \varepsilon^2|\nabla\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u - f|^2 + 2\varepsilon(u - f)\varphi + \varepsilon^2|\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Entrauschen von Bildern III

- Wählen wir in dem Funktional $F(z) = \frac{1}{2}|z|^2$, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2 \,\mathrm{d}x.$$

- Das können wir auf $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ betrachten. Für $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$u \text{ Minimierer} \Rightarrow \mathfrak{F}[u] \leq \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi],$$

  also hat die Funktion $\varepsilon \mapsto \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi]$ ein Minimum in $\varepsilon = 0$. Damit

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi] = 0$$

  Wir leiten dies nach ε ab:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi] &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + \varepsilon|\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega 2(u-f)\varphi + 2\varepsilon|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Entrauschen von Bildern III

- Wählen wir in dem Funktional $F(z) = \frac{1}{2}|z|^2$, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2 \,\mathrm{d}x.$$

- Das können wir auf $\mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ betrachten. Für $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$u \text{ Minimierer} \Rightarrow \mathfrak{F}[u] \leq \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi],$$

also hat die Funktion $\varepsilon \mapsto \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi]$ ein Minimum in $\varepsilon = 0$. Damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi] = 0$$

Wir setzen $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathfrak{F}[u+\varepsilon\varphi] = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + \lambda \int_\Omega (u-f)\varphi \,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 0$$

Integrieren wir (formal) partiell, so erhalten wir

$$\int_\Omega (-\Delta u + \lambda(u-f))\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für } \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Entrauschen von Bildern IV

- Das ist eine **schwache Formulierung** der Gleichung

$$-\Delta u + \lambda(u - f) = 0,$$

also

$$-\Delta u + \lambda u = \lambda f.$$

- Auf der linken Seite: **Elliptischer Differentialoperator** der Ordnung 2.
- Solche Operatoren **boosten die Regularität**:

$$\mathtt{Reg}(u) \approx \mathtt{Reg}(f) + 2.$$

Metaprinzip

Wenn $F(z) = \frac{1}{2}|z|^2$, dann ist das durch

$$\mathfrak{F}[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u - f|^2 \,\mathrm{d}x$$

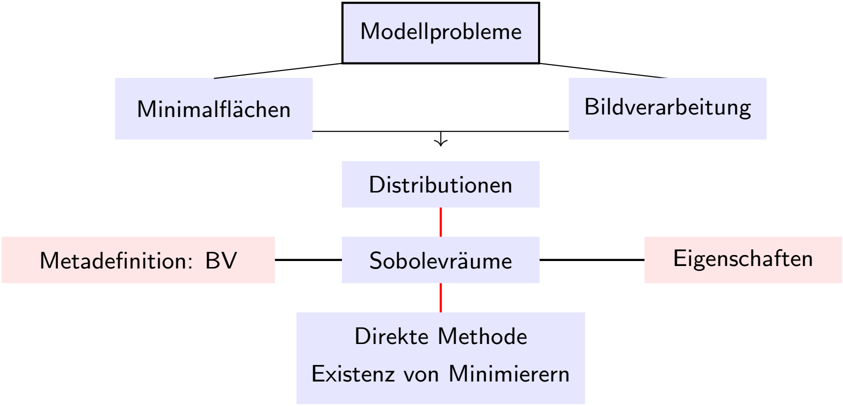
entrauschte Bild **viel regulärer** als f! $\to$ **Kanten** werden verschmiert

Struktur

All diese Probleme können mit

Funktionen beschränkter Variation

– kurz: BV-Funktionen – angegangen werden. Heuten gehen wir wie folgt vor:

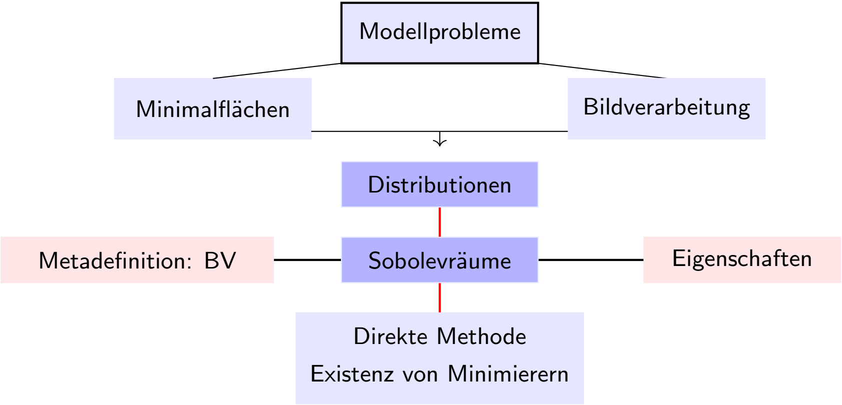


Struktur

All diese Probleme können mit

Funktionen beschränkter Variation

– kurz: BV-Funktionen – angegangen werden. Heuten gehen wir wie folgt vor:



Distributionen & Sobolevräume

Um diese Probleme behandeln zu können, benötigen wir eine

Verallgemeinerung der klassischen Differenzierbarkeit.

Wir setzen für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) := \{\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $\operatorname{spt}(\varphi)$ kompakt$\}$,

wobei $\operatorname{spt}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega\colon\ \varphi(x) \neq 0\}}$ der **Träger** von φ ist.

- Ist $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, so folgt nach dem Satz von Gauß (partielle Integration):

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_i \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}}_{=0} - \int_\Omega u \partial_{x_i}\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \, \mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Auf der rechten Seite ist keine Ableitung von u!

Distributionen & Sobolevräume

Um diese Probleme behandeln zu können, benötigen wir eine

Verallgemeinerung der klassischen Differenzierbarkeit.

Wir setzen für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) := \{\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $\mathrm{spt}(\varphi)$ kompakt$\}$,

wobei $\mathrm{spt}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega\colon \ \varphi(x) \neq 0\}}$ der **Träger** von φ ist.

- Ist $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, so folgt nach dem Satz von Gauß (partielle Integration):

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_i \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}}_{=0} - \int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Auf der rechten Seite ist keine Ableitung von u!

Distributionen & Sobolevräume

- Wir setzen für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$
$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$
Dies ergibt eine **lineare Abbildung** $T_f\colon\ C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$.
- Für $u \in C^1(\Omega)$ übersetzt sich die Zeile
$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_i \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}}_{=0} - \int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \,\mathrm{d}x$$
zu
$$T_{\partial_{x_i} u}(\varphi) := \int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_{x_i}\varphi \,\mathrm{d}x =: -T_u(\partial_{x_i}\varphi)$$
für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
- Dies nützen wir nun, um sehr irregulären Objekten Ableitungen zuzuordnen!

Distributionen & Sobolevräume

- Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist $T_f \colon C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{R}$.
- Wir wollen uns **stetigen linearen Abbildungen** $T \colon C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ widmen.
- Hierzu benötigen wir einen Konvergenzbegriff auf $C^\infty_c(\Omega)$:

Definition (Konvergenz auf $C^\infty_c(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \in C^\infty_c(\Omega)$. Wir sagen, (φ_j) **konvergiert in** $\mathscr{D}(\Omega)$ zu φ, falls

1. es **eine kompakte Menge** $K \subset \Omega$ gibt mit
$$\operatorname{spt}(\varphi), \operatorname{spt}(\varphi_1), \ldots \subset K.$$
2. Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt
$$\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x)| \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Eine lineare Abbildung $T \colon C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{R}$, die **stetig** bzgl. Konvergenz in $\mathscr{D}(\Omega)$ ist, heißt eine **Distribution** (in Formeln $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$):
$$\varphi_j \to \varphi \ \text{ in } \mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_j) \to T(\varphi).$$

Drei wichtige Beispiele

Beispiel (Reguläre Distributionen)

Sei $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann definiert

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega \varphi f \,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$$

eine Distribution. Ist $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit $T = T_f$ für ein $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so nennen wir T eine **reguläre Distribution**.

Beweis. Seien $\varphi, \varphi_1, \ldots \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ mit $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, d.h.

- $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\operatorname{spt}(\varphi), \operatorname{spt}(\varphi_1), \ldots \subset K$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $\sup_\Omega |\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)| \to 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi) - T_f(\varphi_j)| &= \left| \int_\Omega (\varphi - \varphi_j) f \,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_K (\varphi - \varphi_j) f \,\mathrm{d}x \right| \le \left(\sup_\Omega |\varphi - \varphi_j|\right) \int_K |f| \,\mathrm{d}x \to 0. \end{aligned}$$

∎

Nicht jede Distribution ist regulär!

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in \Omega$. Wir betrachten das Funktional

$$T(\varphi) := \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = \varphi(x_0).$$

Dann gibt **es kein** $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$T = T_f, \quad \text{d.h.,} \quad \varphi(x_0) = \int_\Omega \varphi f \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega). \qquad (*)$$

Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ und gelte

$$\int_U f\varphi \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(U).$$

Dann gilt $f = 0$ $\mathscr{L}^n$-fast überall.

Mit dem Lemma: Wir setzen $U = \Omega \setminus \{x_0\}$. Dann:

$$(*) \Longrightarrow f = 0 \ \mathscr{L}^n\text{-f.ü. auf } U \Longrightarrow f = 0 \ \mathscr{L}^n\text{-f.ü auf } \Omega,$$

und das ist ein Widerspruch!

Radonmaße

Definition (Radonmaß)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathscr{B}(\Omega)$ die Borelsche σ-Algebra auf Ω. Ein Maß auf $\mathscr{B}(\Omega)$ heißt **Radonmaß**, falls gilt:

1. μ ist **lokal endlich**, d.h., $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$,
2. μ ist *von innen regulär*, d.h., für jedes $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Beispiel

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{H}^{n-1}$ das Oberflächenmaß. Dann ist $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \Sigma$ Radon.

Wichtiger Unterschied

Maße können singulär bzgl. $\mathscr{L}^n$ sein! Hierbei:

- $\mu << \mathscr{L}^n$ (absolutstetig): $\mathscr{L}^n$-Nullmengen $\subset$ μ-Nullmengen
- $\mu \perp \mathscr{L}^n$ (singulär): μ ist nicht absolutstetig bzgl. $\mathscr{L}^n$

Drei wichtige Beispiele

Maßreguläre Distributionen

Sei μ ein **Radonmaß** auf Ω. Dann definiert

$$T_\mu(\varphi) := \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

eine Distribution. Ist $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit $T = T_\mu$ für ein Radonmaß μ, so nennen wir T eine **maßreguläre Distribution**.

Beweis. Seien $\varphi, \varphi_1, \ldots \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, d.h.

- $\exists K \subset \Omega$ kompakt: $\operatorname{spt}(\varphi), \operatorname{spt}(\varphi_1), \ldots \subset K$
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$: $\sup_\Omega |\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)| \to 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} |T_\mu(\varphi) - T_\mu(\varphi_j)| &= \left| \int_\Omega (\varphi - \varphi_j) \, \mathrm{d}\mu \right| \\ &= \left| \int_K (\varphi - \varphi_j) \, \mathrm{d}\mu \right| \leq (\sup_\Omega |\varphi - \varphi_j|)\mu(K) \to 0. \end{aligned}$$

∎

Distributionsableitungen & Sobolevräume

Erinnerung: Für $u \in C^1(\Omega)$ haben wir

$$T_{\partial_{x_i} u}(\varphi) := \int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \, dx = -\int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \, dx =: -T_u(\partial_{x_i}\varphi)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definiert

$$(\partial_{x_j} T)(\varphi) := -T(\partial_{x_j}\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

eine Distribution. Wir nennen sie die j-te Distributionsableitung von T und

$$DT = (\partial_{x_1} T, \ldots, \partial_{x_n} T) \in \mathscr{D}'(\Omega)^n$$

den **distributionellen Gradienten** von T.

Distributionsableitungen & Sobolevräume

Erinnerung: Für $u \in C^1(\Omega)$ haben wir

$$\partial_{x_i} T_u(\varphi) = T_{\partial_{x_i} u}(\varphi) := \int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \, dx = -\int_\Omega u \partial_{x_i} \varphi \, dx =: -T_u(\partial_{x_i} \varphi)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definiert

$$(\partial_{x_j} T)(\varphi) := -T(\partial_{x_j} \varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

eine Distribution. Wir nennen sie die j-te Distributionsableitung von T und

$$DT = (\partial_{x_1} T, \ldots, \partial_{x_n} T) \in \mathscr{D}'(\Omega)^n$$

den **distributionellen Gradienten** von T.

Sobolevräume

Ist $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so ...

- können wir die reguläre Distribution T_f betrachten, ...
- ihre distributionellen Ableitungen betrachten, ...
- und fragen, ob diese allesamt wiederum reguläre Distributionen sind:

$$\partial_{x_i} T_f = T_{f_i} \text{ mit } f_i \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad i \in \{1, ..., n\}.$$

Falls **ja**, so nennen wir f **schwach differenzierbar** und schreiben $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lemma (Zur Erinnerung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ und gelte

$$\int_U f \varphi \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(U).$$

Dann gilt $f = 0$ $\mathscr{L}^n$-fast überall.

$$T_{f_i} = T_{g_i} \Rightarrow \left(\forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega) \colon \int_\Omega (f_i - g_i)\varphi \, \mathrm{d}x = 0\right) \Rightarrow f_i = g_i \ \mathscr{L}^n\text{-f.ü.}.$$

Sobolevräume

Damit ist für $f \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_{x_i} T_f = T_{f_i} \text{ mit } f_i \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

wobei $f_i \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ **eindeutig festgelegt ist**. Wir schreiben etwas ungenau

$$\partial_{x_i} f := f_i.$$

Konsistenz mit klassischer Differenzierbarkeit: Ist $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, so ...

$$\begin{aligned}(\partial_{x_i} T_u)(\varphi) &\overset{\text{Def}}{=} -T_u(\partial_{x_i}\varphi) \overset{\text{Def}}{=} -\int_\Omega u \partial_{x_i}\varphi \, \mathrm{d}x \\ &\overset{u \in \mathrm{C}^1(\Omega)}{=} \int_\Omega (\partial_{x_i} u)\varphi \, \mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} T_{\partial_{x_i} u}(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Sobolevräume

Sobolevräume: Stelle L^p-Größenbedingungen an die schwachen Ableitungen!

Definition (Sobolevräume)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Der **Sobolevraum** $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ besteht aus allen

1. $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$,
2. die **schwach differenzierbar** sind und erfüllen:

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\partial_{x_1} u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \ldots + \|\partial_{x_n} u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} := \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\partial_{x_1} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \ldots + \|\partial_{x_n} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \text{falls } p = \infty.$$

Induktiv definieren wir auch $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ und statten diesen Raum aus mit

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Sobolevräume

Sobolevräume: Stelle L^p-Größenbedingungen an die schwachen Ableitungen!

Definition (Sobolevräume)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Der **Sobolevraum** $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ besteht aus allen

1. $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$,
2. die **schwach differenzierbar** sind und erfüllen:

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\partial_{x_1} u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \ldots + \|\partial_{x_n} u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} := \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|\partial_{x_1} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \ldots + \|\partial_{x_n} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \text{falls } p = \infty.$$

Induktiv definieren wir auch $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ und statten diesen Raum aus mit

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Einige Eigenschaften von Sobolevräumen

- $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ ist ein **Banachraum** für alle $1 \leq p \leq \infty$.
- Falls $1 \leq p < \infty$, so ist $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ **separabel**, d.h., es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge.
- $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ hat $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ für alle $1 \leq p < \infty$ als **dichte Teilmenge**:

$$\forall u \in W^{k,p}(\Omega)\, \exists (u_j) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) : \ \|u - u_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Bemerkung

$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ ist **nicht** dicht in $W^{1,\infty}(\Omega)$. **Idee:**

- $W^{1,\infty}(\Omega) \simeq$ Lipschitz stetige Funktionen auf Ω.
- $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{C_b^1(\overline{\Omega})}$ für $u \in C_b^1(\Omega)$, und $(C_b^1(\Omega), \|\cdot\|_{C_b^1(\Omega)})$ ist Banach.

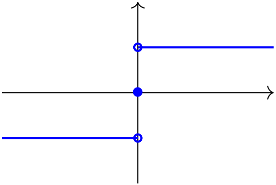
- Für $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}$, definieren wir **Nullrandwerteräume** via

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Sobolevräume und Sprünge

Wann gehören **Sprungfunktionen** zu $W^{1,p}$?

- Wir betrachten für $n = 1$ die **Signumsfunktion** u auf $(-1, 1)$:



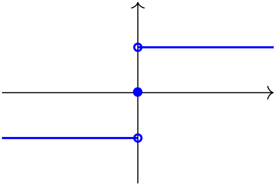
- Wir berechnen die Distributionsableitung. Sei $\varphi \in C_c^\infty((-1, 1))$. Dann:

$$
\begin{aligned}
\partial_x T_u(\varphi) &\overset{\text{Def}}{=} -T_u(\partial_x \varphi) = -\int_{(-1,1)} u\, \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{0} u \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} u \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x \\
&= (\varphi(0) - \varphi(-1)) - (\varphi(1) - \varphi(0)) = 2\varphi(0) = T_{2\delta_0}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Sobolevräume und Sprünge

Wann gehören **Sprungfunktionen** zu $W^{1,p}$? **Nie!**

- Wir betrachten für $n = 1$ die **Signumsfunktion** u auf $(-1, 1)$:



- Wir berechnen die Distributionsableitung. Sei $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$. Dann:

$$\begin{aligned}\partial_x T_u(\varphi) &\overset{\text{Def}}{=} -T_u(\partial_x\varphi) = -\int_{(-1,1)} u\,\partial_x\varphi\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{0} u\partial_x\varphi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 u\partial_x\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \partial_x\varphi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \partial_x\varphi\,\mathrm{d}x \\ &= (\varphi(0) - \varphi(-1)) - (\varphi(1) - \varphi(0)) = 2\varphi(0) = T_{2\delta_0}(\varphi)\end{aligned}$$

BV-Funktionen

Metadefinition – wir erlauben Sprünge!

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ der Raum

- derjenigen Funktionen $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,
- deren distributionelle Ableitungen **maßregulär sind**.

Informell: Distributionsableitungen 'sind' Radonmaße

Fragen – und Hauptziele der Vorlesung:

- Welche Art glatter Approximation lassen solche Funktionen zu?
- Welche Randwerte nehmen solche Funktionen an? (Spurtheorie)
- Weche Einbettungssätze gelten für solche Funktionen?
- Sprünge sind eine Art von Singularitäten. Welche anderen Singularitäten sind für BV-Funktionen generisch?
- Wie lassen sich damit Variationsprobleme lösen ...
- und numerisch behandeln?

Coda

Theorem

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!